कुल पृष्ठ संख्या–32 (कवर पेज सहित ) क्रम संख्या....

# माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, अजमेर

## उच्च माध्यमिक परीक्षा

(परीक्षार्थी द्वारा भरा जाना चाहिये)

Candidate's Roll No. in English

(In Figures)

(In Words) ----

परीक्षार्थी का नामांक हिन्दी में

शब्दों में ----

नोट :– परीक्षार्थी उपरोक्त के अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका के अन्य किसी भी भाग में अपना नामांक नहीं लिखें।

माध्यम – हिन्दी ✓ अंग्रेजी

विषय ..... गणित .....

परीक्षा का दिन.....

दिनांक .....

नोट :– परीक्षार्थी के लिए आवश्यक निर्देश इस पृष्ठ के पिछले भाग पर उल्लेखित हैं। जिन्हें सावधानी पूर्वक पढ़ लें व पालना अवश्य करें।

परीक्षक हेतु निर्देश :– (1) परीक्षक को उपरोक्त सारणी अनुसार प्राप्तांक भरना अनिवार्य है, अन्यथा नियमानुसार दंडित किया जावेगा।

(2) परीक्षक उत्तर पुस्तिका के अन्दर के पृष्ठों के बायीं ओर निर्धारित कॉलम में लाल इंक से अंक प्रदत्त करें।

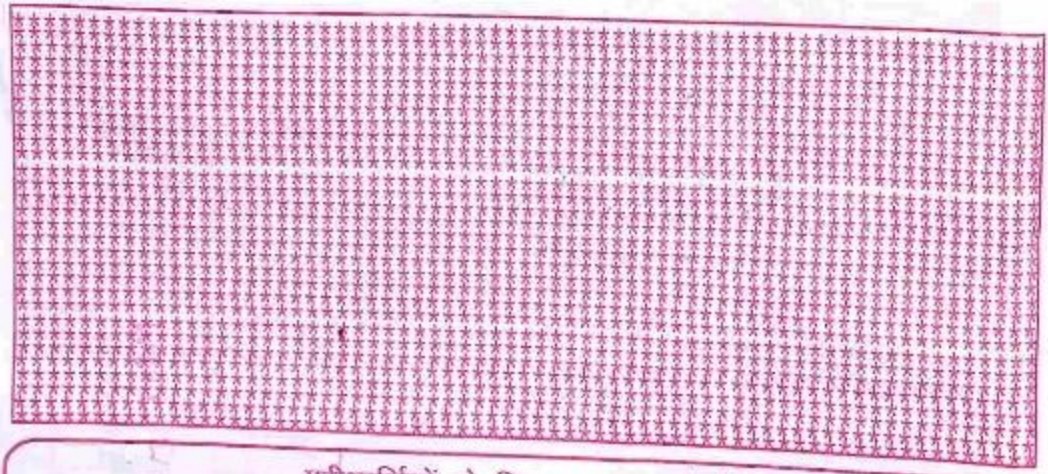
(3) कुल योग भिन्न में प्राप्त होने पर उसे पूर्णांक में ही परिवर्तित कर अंकित करें (उदाहरणार्थ : 15 ¼ को 16, 17 ½ को 18, 19 ¾ को 20)

### प्रश्नवार प्राप्तांकों की सारणी (परीक्षक के उपयोग हेतु)

| प्रश्नों की क्रम संख्या | प्राप्तांक | प्रश्नों की क्रम संख्या | प्राप्तांक |
|---|---|---|---|
| 1 | | 19 | |
| 2 | | 20 | |
| 3 | | 21 | |
| 4 | | 22 | |
| 5 | | 23 | |
| 6 | | 24 | |
| 7 | | 25 | |
| 8 | | 26 | |
| 9 | | 27 | |
| 10 | | 28 | |
| 11 | | 29 | |
| 12 | | 30 | |
| 13 | | 31 | |
| 14 | | योग | |
| 15 | | प्राप्त अंकों का कुल योग (Roundoff) | |
| 16 | | शब्दों में | शब्दों में |
| 17 | | | |
| 18 | | | |

परीक्षक के हस्ताक्षर ..... संकेतांक

प्रमाणित किया जाता है कि इस उत्तर पुस्तक के निर्माण में 58 जी.एस.एम. क्रीमवोव कागज़ ही उपयोग में लिया गया है। 158/2016



## परीक्षार्थियों के लिए आवश्यक निर्देश

1. समस्त प्रश्नों का हल निर्धारित शब्द सीमा में इसी उत्तर पुस्तिका में करना है। विशेष परिस्थिति में अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका पृथक से उत्तर पुस्तिका भरी हुई होने पर पर्यवेक्षक एवं वीक्षक की अनुशंषा पर ही उपलब्ध कराई जायेगी।
2. प्रश्न–पत्र पर निर्धारित स्थान पर अपना नामांक लिखें।
3. प्रश्न–पत्र हल करने के पश्चात् जिस पृष्ठ पर हल समाप्त होता है, उस पर अन्त में "समाप्त" लिखकर अन्त के सभी रिक्त पृष्ठों को तिरछी लाईन से काटें।
4. निम्न बातों का विशेष ध्यान रखें अन्यथा अनुचित साधनों की रोकथाम अधिनियम के तहत कार्यवाही की जा सकेगी।
   (i) उत्तर पुस्तिका के ऊपर/अन्दर तथा प्रश्नोत्तर के किसी भी भाग में चाही गई सूचना के अलावा अपना नामांक, नाम, पता, फोन नम्बर अथवा पहचान की कोई अन्य प्रकार की सूचना आदि अंकित नहीं करें अन्यथा "अनुचित साधनों के प्रयोग" के अन्तर्गत कार्यवाही की जावेगी।
   (ii) उत्तर पुस्तिका के पृष्ठों को फाड़ें नहीं। उत्तर–पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर अंकित संख्या के अनुसार पृष्ठ पूरे होने चाहिये।
   (iii) परीक्षा केन्द्रों पर पुस्तक, लेख, कागज, केलक्यूलेटर, मोबाईल, पेजर आदि किसी भी प्रकार का इलेक्ट्रोनिक उपकरण तथा किसी भी प्रकार का हथियार आदि ले जाना निषेध है।
   (iv) वस्त्र, स्केल, ज्योमेट्री बॉक्स पर कुछ भी न लिखकर लावें। टेबुल के आस–पास कोई अवैध सामग्री नहीं होनी चाहिये, इसकी जांच कर लें।
   (v) अपनी उत्तर पुस्तिका/ग्राफ/मानचित्र आदि परीक्षा भवन से बाहर ले जाना दण्डनीय अपराध है, अतः परीक्षा समाप्ति पर उत्तर पुस्तिका वीक्षक को बिना सौंपे परीक्षा कक्ष नहीं छोड़ें।
5. उत्तरों को क्रमानुसार एक ही स्थान पर लिखें। प्रश्न क्रमांक भी सही अंकित करें, अन्यथा दण्ड स्वरूप परीक्षक को 1 अंक कम करने का अधिकार है। बीच में उत्तर पुस्तिका के पृष्ठ रिक्त न छोड़ें। गणित विषय के लिए रफ कार्य उत्तर पुस्तिका के अंतिम पृष्ठों पर करें तथा तिरछी रेखा से काटें।
6. जहाँ तक हो सके प्रश्न के सभी भाग के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में एक ही स्थान पर अंकित करें।
7. भाषा विषयों को छोड़कर शेष सभी विषयों के प्रश्न–पत्र हिन्दी–अंग्रेजी दोनों भाषा में मुद्रित है। किसी भी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही माना जाये।

| परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर |
|---|---|---|

1. दिया है -

$$\tan^{-1}3 + \cot^{-1}x = \pi/2$$

$$\Rightarrow \cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}3$$

$$\Rightarrow \cot^{-1}x = \cot^{-1}3 \quad \{\because \cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}x\}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3}$$

2. दिया है - आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की कोटि $= 2\times2$

आव्यूह के अवयव $a_{ij} = |-5i+2j|$

अतः

$$a_{11} = |-5(1)+2(1)| = |-5+2| = |-3| = 3$$

$$a_{12} = |-5(1)+2(2)| = |-5+4| = |-1| = 1$$

$$a_{21} = |-5(2)+2(1)| = |-10+2| = |-8| = 8$$

$$a_{22} = |-5(2)+2(2)| = |-10+4| = |-6| = 6$$

अतः आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

3. दिया है -

$$\begin{bmatrix} x & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ 6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [2x^2 - 18] = [0]$$

संगत अवयवों की तुलना से -

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9$$

$$\Rightarrow x = \pm 3$$

4. $$I = \int \frac{\tan x}{\cot x}\, dx$$

$$I = \int \frac{\sin x/\cos x}{\cos x/\sin x}\, dx$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$I = \int \tan^2 x\, dx$$

$$I = \int (\sec^2 x - 1)\, dx \qquad \{\because \sec^2 x = \tan^2 x + 1\}$$

$$I = \tan x - x + c$$

5. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow x \frac{dy}{dx} = y$

$\Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow \log y = \log x + \log c$

$\Rightarrow \log y = \log xc$

$\Rightarrow y = xc$

6. दिया है -

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$

$\because \vec{a} \parallel \vec{b}$ तब समांतरता की शर्त से-

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{5}{\lambda}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 10$

| परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर |
|---|---|---|

7. रेखा का कार्तीय समीकरण – $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4}$

रेखा के मानक समीकरण $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ से तुलना करने पर दिक्अनुपात –

$a = 4,\ b = 7,\ c = 4$

तब दिक् कोसाइन $= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

$= \frac{4}{\sqrt{16+49+16}},\ \frac{7}{\sqrt{16+49+16}},\ \frac{4}{\sqrt{16+49+16}}$

$l, m, n = \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9}$ या $-\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}$

8. समतलों के सदिश समीकरण –

$\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ –①

$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 7$ –②

तब समतलों के अभिलंब सदिश –

समी① से $\vec{n_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

समी② से $\vec{n_2} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

अतः समतलों के बीच कोण –

$\cos\theta = \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|} \right|$

$\cos\theta = \left| \frac{(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})}{|\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}|\,|2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}|} \right|$

$\cos\theta = \left| \frac{2 - 1 - 1}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}\,\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}} \right|$

$\cos\theta = \left| \frac{0}{\sqrt{3}\,\sqrt{6}} \right|$

$\cos\theta = 0$

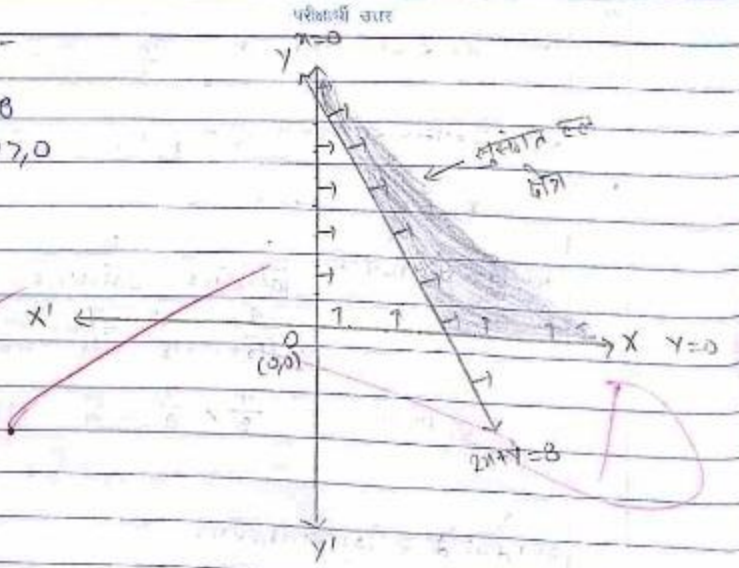
$\Rightarrow \boxed{\theta = \pi/2}$

| परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या |
|---|---|

9. उत्तरोच -

$2x+y \geq 8$

$x \geq 0, y \geq 0$




10. दिया है -

$P(A) = 0.2$ , $P(B) = 0.5$

$P(A \cup B) = ?$

$\because$ A व B स्वतंत्र घटनाएँ हैं। अतः $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

तब $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) P(B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = 0.2 + 0.5 - (0.2)(0.5)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = 0.7 - 0.10 = 0.60$

11. दिया है - वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में संबंध

$R = \{(a,b) : a \geq b\}$

सिद्ध करना है - R (संबंध) स्वतुल्य व संक्रामक है किंतु सममित नहीं

प्रश्नानुसार,

स्वतुल्य संबंध -

माना $a \in R$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय)

माना

$aRa \Rightarrow a \geq a$ , जो सत्य है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$\Rightarrow (a,a) \in R$

$\because (a,a) \in R, \forall a \in R$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) अतः R एक स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध :-

माना $a,b \in R$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय)

माना

$aRb \Rightarrow a \geq b$

$\Rightarrow b \not\geq a$

$\Rightarrow bRa$

$\Rightarrow (b,a) \notin R$

Ex:- $1,2 \in R$ (वास्तविक संख्या)

$\Rightarrow 2 \geq 1$

$\Rightarrow 1 \not\geq 2$

$\Rightarrow 2R1$

$\because (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R, \forall a,b \in R$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय)

अतः R एक सममित संबंध है नहीं है)

संक्रामक संबंध :-

माना $a,b,c \in R$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय)

माना

माना $aRb \Rightarrow (a,b) \in R \Rightarrow a \geq b$ — ①

$bRc \Rightarrow b \geq c$ — ② समी० ① व ② से-

$\Rightarrow a \geq c$

$\Rightarrow aRc$

$\Rightarrow (a,c) \in R$

$\because (a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \forall a,b,c \in R$ (वास्तविक संख्या)

अतः R संक्रामक संबंध है।

12 सिद्ध करना है-

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

L.H.S. $= \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2/9 + 1/4}{1-(2/9)(1/4)}\right)$ $\quad \because \left\{\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right\}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{8+9}{36}}{\frac{36-2}{36}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{8+9}{34}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{17}{34}\right)$

L.H.S $= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ —①

R.H.S $= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \theta$ (माना)

$\Rightarrow \sin^{-1}(4/5) = 2\theta$

$\Rightarrow 4/5 = \sin 2\theta$

$\Rightarrow \sin 2\theta = 4/5$

$\Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow 5\tan\theta = 2 + 2\tan^2\theta$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta - 5\tan\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = -5 \pm \sqrt{(-5)^2 + 4(}$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta - 4\tan\theta - \tan\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\tan\theta(\tan 2\theta - 2) - 1(\tan\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (2\tan\theta - 1)(\tan 2\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow 2\tan\theta - 1 = 0$ या $\tan\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\tan\theta = 1$ या $\tan\theta = 2$

$\Rightarrow \tan\theta = 1/2$ या $\theta = \tan^{-1}(2)$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1/2)$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

अतः $R.H.S. = \frac{1}{2}\sin^{-1}(4/5) = \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}(1/2)$ — (2) ∴ $\theta \neq \tan^{-1}(2)$ ∴ यह मान समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

समी (1) व (2) से -

$\boxed{L.H.S = R.H.S}$

13. दिया है -

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

तब -

$$\frac{(A+A')}{2} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\frac{1}{2}(A+A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -5 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left\{\frac{1}{2}(A+A')\right\}' = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(A+A')$$

अतः $\frac{1}{2}(A+A') = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

अथवा

$$\frac{(A-A')}{2} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}2 & -4 & -2\\ -1 & 4 & 3\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -3\\ -2 & 3 & 2\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{(A-A')}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -3 & -3\\ 3 & 0 & 6\\ 3 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{(A-A')}{2} = \begin{bmatrix}0 & -3/2 & -3/2\\ 3/2 & 0 & 3\\ 3/2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left\{\frac{1}{2}(A-A')\right\}' = \begin{bmatrix}0 & 3/2 & 3/2\\ -3/2 & 0 & -3\\ -3/2 & 3 & 0\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}(A-A')$$

अतः

$$\frac{1}{2}(A-A') = \begin{bmatrix}0 & -3/2 & -3/2\\ 3/2 & 0 & 3\\ 3/2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

एक विषम सममित आव्यूह है।

अतः आव्यूह A को एक सममित व एक विषम सममित आव्यूह के योगफल में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$A = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A')$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -5/2 & -1/2\\ -5/2 & 4 & 0\\ -1/2 & 0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -3/2 & -3/2\\ 3/2 & 0 & 3\\ 3/2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

| शिक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर |
|---|---|---|

14. दिया है – फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \pi/2 \\ 5, & x = \pi/2 \end{cases}$

$x = \pi/2$ पर :–

फलन का मान –

$$\boxed{f(\pi/2) = 5} \quad -(1)$$

फलन की दाँयी सीमा –

$$\lim_{h\to 0} f(\pi/2 + h) = \lim_{h\to 0} \frac{k\cos(\pi/2 + h)}{\pi - 2(\pi/2 + h)}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 + 0) = \lim_{h\to 0} \frac{-k\sin h}{\pi - \pi - 2h} \quad \{\because \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta\}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 + 0) = \lim_{h\to 0} + \frac{k\sin h}{+2h}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 + 0) = \lim_{h\to 0} \frac{k}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 + 0) = \frac{k}{2}(1) = \frac{k}{2} \quad -(2) \quad \left\{\because \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\right\}$$

फलन की बाँयी सीमा –

$$\lim_{h\to 0} f(\pi/2 - h) = \lim_{h\to 0} \frac{k\cos(\pi/2 - h)}{\pi - 2(\pi/2 - h)}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 - 0) = \lim_{h\to 0} \frac{k\sin h}{\pi - \pi + 2h}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 - 0) = \lim_{h\to 0} \frac{k\sin h}{2h}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 - 0) = \frac{k}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\Rightarrow f(\pi/2 - 0) = \frac{k}{2}(1) = \frac{k}{2} \quad -(3) \quad \left\{\because \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\right\}$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

∴ फलन $x = \pi/2$ पर सतत है अतः

$f(\pi/2) = f(\pi/2 + 0) = f(\pi/2 - 0)$

$\Rightarrow$ समी ①, ②, ③ से मान रखने पर-

$\Rightarrow 5 = k/2 = k/2$

$\Rightarrow \frac{k}{2} = 5$

$\Rightarrow \boxed{k = 10}$

15 दिया है-

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ — ①

समी ① का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर-

$f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2x - 6 = 0$

$\Rightarrow 2x = 6$

$\Rightarrow x = 3$

बिंदु $x = 3$, वास्तविक संख्यारेखा को दो असंयुक्त अंतरालों में विभाजित करता है।

$-\infty \xleftarrow{f'(x) < 0} 3 \xrightarrow{f'(x) > 0} \infty$

(a) वर्धमान के लिए-

$f'(x) > 0$

अंतराल $(3, \infty)$ में $f'(x) > 0$ प्राप्त होता है अतः फलन अंतराल $(3, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

(b) हासमान के लिए-

$f'(x) < 0$ अंतराल $(-\infty, 3)$ में $f'(x) < 0$ प्राप्त होता है अतः फलन $f(x)$ अंतराल $(-\infty, 3)$ में निरंतर हासमान है।

16. दिया है - वृत्त की त्रिज्या में वृद्धि $\frac{dr}{dt} = 5 \text{ cm/s}$

प्रश्नानुसार,

वृत्त का क्षेत्रफल $(A) = \pi r^2$ ... (1) ($r$ = वृत्त की त्रिज्या)

समी (1) का $t$ (समय) के सापेक्ष अवकलन करने पर -

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$$

अतः

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times 5 = 10\pi r$$

यदि $r = 6$ cm तब

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 10\pi (6) = 60\pi \text{ cm}^2/\text{s}}$$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल $60\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ की दर से बढ़ रहा है।

17. $I = \int \frac{(x-1)(x-\log x)^3}{x} dx$

Put $x - \log x = t$ ... (1)

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right) dx = dt$$

शिक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

तब $I = \int t^3 \, dt$

$I = \frac{t^{3+1}}{3+1} + c$

$\Rightarrow I = \frac{t^4}{4} + c$

समी (1) से $t$ का मान प्रतिस्थापित करने पर-

$I = \frac{(x - \log x)^4}{4} + c$

18. $I = \int \frac{1}{3x^2+6x+2} \, dx$

$I = \int \frac{1}{3(x^2+2x+2/3)} \, dx$

$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+2x+2/3}$

$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+2/3} \, dx$

$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 1+2/3}$

$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 1/3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2 - (1/\sqrt{3})^2}$

$I = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2 \times 1/\sqrt{3}} \log \left| \frac{(x+1) - 1/\sqrt{3}}{(x+1) + 1/\sqrt{3}} \right| + c$

$I = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \log \left| \frac{x+1-1/\sqrt{3}}{x+1+1/\sqrt{3}} \right| + c$

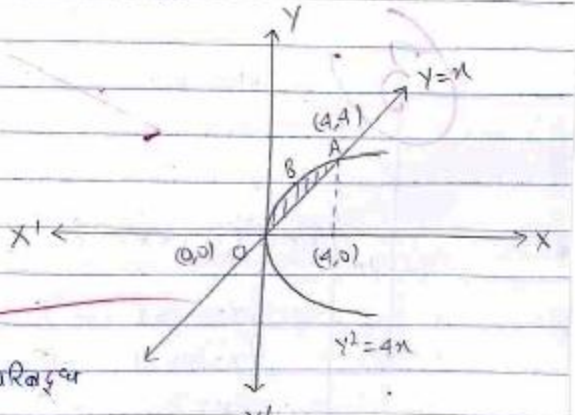
परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log_e \left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 1} \right| + C$$

15. दिया है -

परवलय का समीकरण $y^2 = 4x \quad -(1) \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$

सरल रेखा का समीकरण $y = x \quad -(2)$




अतः रेखा व परवलय से परिबद्ध क्षेत्र OAB प्राप्त होता है।

समी. (1) व (2) से

$(x)^2 = 4x$

$\Rightarrow x^2 = 4x$

$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 4$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 4 \Rightarrow y = 4$

अतः रेखा व वक्र का प्रतिच्छेदी बिंदु A (4,4) है।

अतः परिबद्ध क्षेत्र OAB का क्षेत्रफल -

$$A = \int_0^4 y \text{ (परवलय से)} \, dx - \int_0^4 y \text{ (रेखा से)} \, dx$$

$$A = \int_0^4 2\sqrt{x} \, dx - \int_0^4 x \, dx$$

$$\Rightarrow A = 2 \times \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{3}\left[(4)^{3/2} - 0\right] - \left[\frac{(4)^2}{2} - 0\right]$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{3} \times 8 - 8$$

$$\Rightarrow A = \frac{32}{3} - 8$$

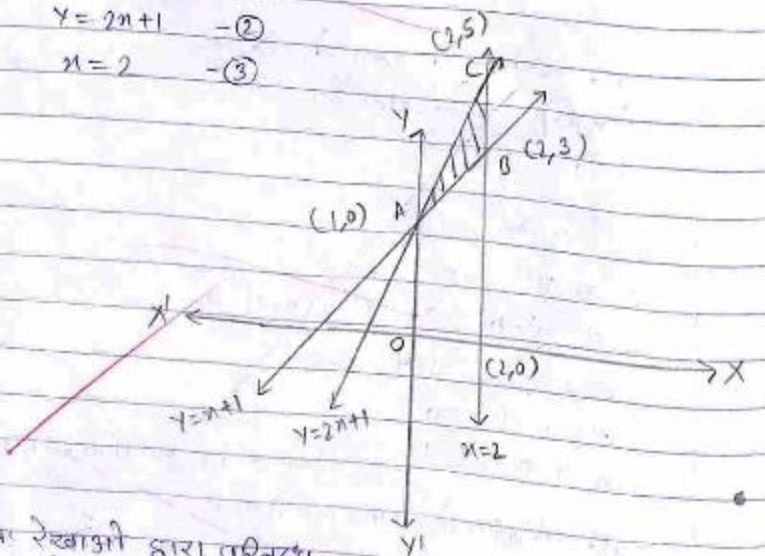
$$\Rightarrow A = \frac{32-24}{3} = \frac{8}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

10. दिया है - रैखिक की भुजाएँ-

$Y = x+1$ - ①

$Y = 2x+1$ - ②

$x = 2$ - ③




अतः रेखाओं द्वारा परिबद्ध सुसंगत क्षेत्र ABC प्राप्त होता है।
समी ① व ② से बिंदु A(1,0), B(2,3), C(2,5) प्राप्त होते हैं।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

अतः त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $= \int_0^2 y\,(\text{रेखा AC से})\,dx - \int_0^2 y\,(\text{रेखा AB से})\,dx$

$A = \int_0^2 (2x+1)\,dx - \int_0^2 (x+1)\,dx$

$A = \int_0^2$

$A = [x^2+x]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2$

$A = [4+2-0-0] - [2+2-0-0]$

$A = 6-4$

$A = 2$ वर्ग इकाई

21. दिया है -

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मात्रक सदिश है। अर्थात् $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

तथा

प्रश्नानुसार, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\Rightarrow (0)^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c}$

$\Rightarrow 0 = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a})$

$\because \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$

$\Rightarrow 0 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a})$ $\quad \because \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

$\Rightarrow 0 = (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a})$

$\Rightarrow 0 = 1+1+1+2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a})$

$\Rightarrow -3 = 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a})$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = -3/2}$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक

| प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर |
|---|---|

22 दिया है-

$\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

तब-

$2\vec{a}+\vec{b} = 2(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})+(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k} = \vec{c}$ (माना)

$\vec{a}-2\vec{b} = (\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-2(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = -\hat{i}+0\cdot\hat{j}-3\hat{k} = \vec{d}$ (माना)

प्रश्नानुसार,

$\vec{c} = 2\vec{a}+\vec{b}$ व $\vec{d} = \vec{a}-2\vec{b}$ प्रत्येक के लंबवत् सदिश मात्रक सदिश माना गया है।

तब

$$\hat{n} = \frac{\vec{c}\times\vec{d}}{|\vec{c}\times\vec{d}|} \quad -(1)$$

$$\because \vec{c}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$\vec{c}\times\vec{d} = \hat{i}(-15-0)-\hat{j}(-9-1)+\hat{k}(0+5)$

$\Rightarrow \vec{c}\times\vec{d} = -15\hat{i}+10\hat{j}+5\hat{k}$

तथा

$|\vec{c}\times\vec{d}| = \sqrt{(-15)^2+(10)^2+(5)^2}$

$= \sqrt{225+100+25}$

$= \sqrt{350}$

तब समी (1) से-

$$\hat{n} = \frac{\vec{c}\times\vec{d}}{|\vec{c}\times\vec{d}|} = \frac{-15\hat{i}+10\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{350}}$$

$$\hat{n} = \frac{-15\hat{i}+10\hat{j}+5\hat{k}}{5\sqrt{14}}$$

$$\hat{n} = -\frac{3\hat{i}}{\sqrt{14}}+\frac{2\hat{j}}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$ ($\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$ के लंबवत् मात्रक सदिश)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान

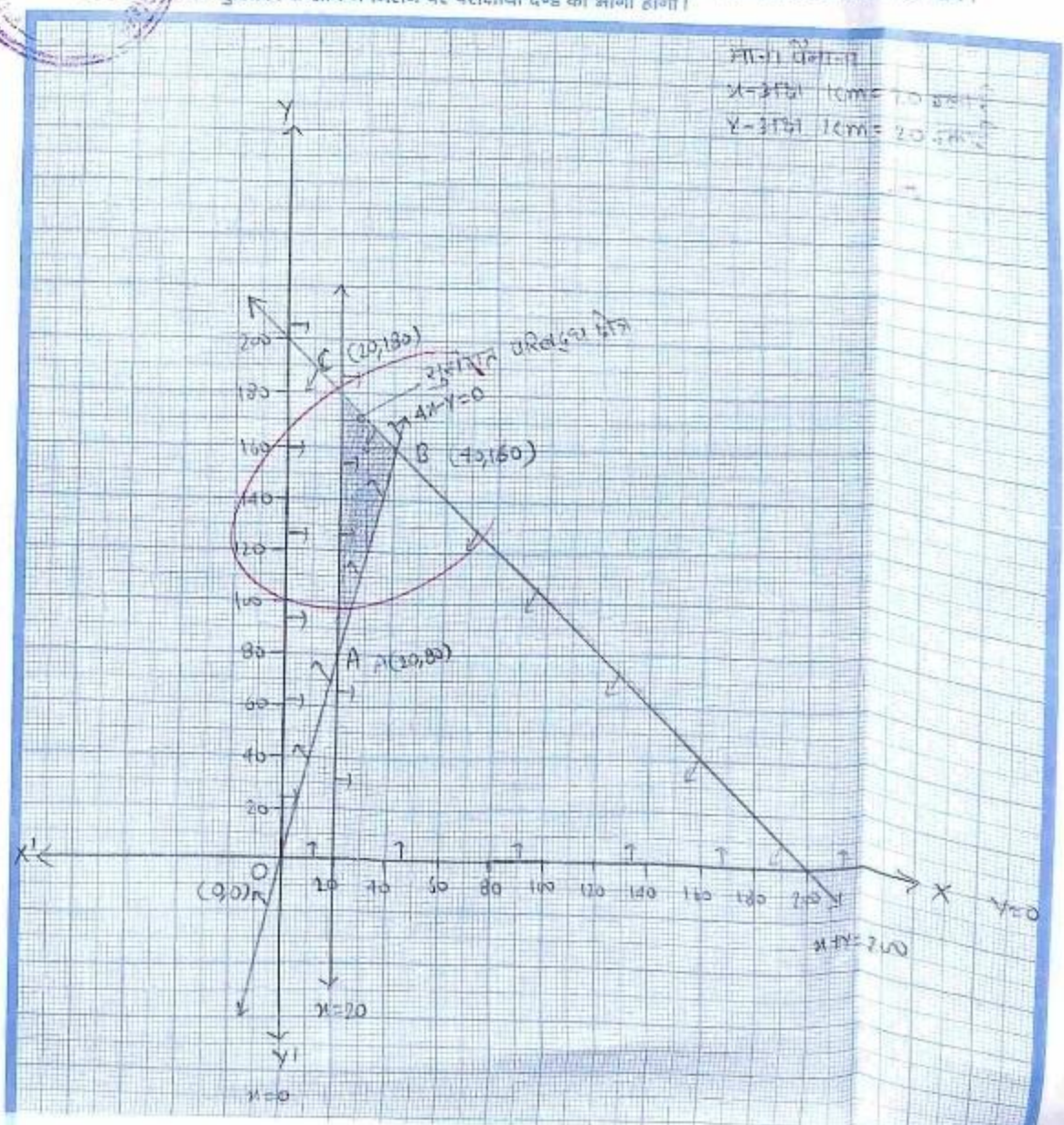
परीक्षा उच्च माध्यमिक परीक्षा

अंकों में

विषय गणित

प्रश्न संख्या 23

नोट : परीक्षार्थी अनिवार्य रूप से इस ग्राफ कागज को अपनी उत्तर पुस्तिका में पीछे द्वारा संलग्न करें तथा साथ ले जायें। ग्राफ कागज उत्तर पुस्तिका के साथ न मिलने पर परीक्षार्थी दण्ड का भागी होगा।



| परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर |
|---|---|---|

23

दिया है - उद्देश्य फलन $Z = 1000x + 600y$

व्यवरोध -

$x + y \leq 200$

$4x - y \leq 0$

$x \geq 20, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

असमिकाओं को समीकरण में बदलने पर -

$x + y = 200$ -①

$4x - y = 0$ -②

$x = 20, \quad x = 0, \quad y = 0$

अतः असमिकाओं द्वारा परिबद्ध संगत क्षेत्र ABC प्राप्त होता है।

समी ① व ② से बिंदु A (20,80), B (40,160), C (20,180) प्राप्त होता है।

अतः

| कोनीय बिंदु | उद्देश्य फलन $Z = 1000x + 600y$ | |
|---|---|---|
| A (20,80) | $Z = 20000 + 48000$ $= 68000$ | |
| B (40,160) | $Z = 40000 + 96000$ $= 136000$ | ← अधिकतम मान |
| C (20,180) | $Z = 20000 + 108000$ $= 128000$ | |

अतः उपरोक्त व्यवरोधों के अंतर्गत उद्देश्य फलन का अधिकतम मान बिंदु B (40,160) पर 136000 प्राप्त होता है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर | परीक्षक

24. दिया है -

थैले A में 2 लाल व 3 काली गेंदें हैं।
थैले B में 3 लाल व 4 काली गेंदें हैं।

माना

घटना E : थैले से निकाली गयी गेंद का लाल होना।

प्रश्नानुसार,

$P(A) = 1/2$ (थैले A को चुनने की प्रायिकता)

$P(B) = 1/2$ (थैले B को चुनने की प्रायिकता)

तथा

$P(E/A) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ (थैले A से निकाली गई गेंद लाल होना)

$P(E/B) = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$ (थैले B से लाल गेंद निकालना)

अतः

यदि निकाली गई गेंद लाल रंग की है तो इसे थैले B से निकाली निकालने की प्रायिकता बेज प्रमेय से -

$$P(B/E) = \frac{P(B)\,P(E/B)}{P(A)P(E/A)+P(B)P(E/B)}$$

$$P(B/E) = \frac{1/2 \times 3/7}{1/2 \times 2/5 + 1/2 \times 3/7}$$

$$P(B/E) = \frac{3/14}{2/10 + 3/14}$$

$$P(B/E) = \frac{3 \times 10}{2 \times 14 + 3 \times 10} = \frac{30}{28+30} = \frac{30}{58}$$

$$P(B/E) = \frac{15}{29}$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

25. दिया है -

बल्बों की कुल संख्या $n(S) = 30$

खराब बल्बों की संख्या $n(A) = 6$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

परीक्षणों की संख्या $n = 2$ (बिना प्रतिस्थापना के)

यादृच्छिक चर X (माना) : खराब बल्ब होना।

अतः X के संभावित मान $X = 0, 1, 2$

तब

$P(X=0) =$ P(बल्ब अच्छा होना) × P (बल्ब अच्छा होना)

$= 4/5 \times 4/5 \quad 4/5 \times 3/4 \quad 4/5 \times 23/29$

$P(X=0) = 25/36 \quad 16/25 \quad 12/20 \quad 92/145$

$P(X=1) =$ P (बल्ब अच्छा होना) × P (बल्ब खराब होना) + P (बल्ब खराब होना) × P (बल्ब अच्छा होना)

$P(X=1) = 4/5 \times 1/5 + 1/5 \times 4/5 = 10/36 \quad 8/25 \quad 4/5 \times 6/29 + 1/5 \times 24/29$

$P(X=1) = 48/145$

$P(X=2) =$ P (बल्ब खराब होना) × P (बल्ब खराब होना)

$= 1/5 \times 1/5 \quad 6/30 \times 5/29$

$P(X=2) = 1/145$

अतः प्रायिकता बंटन -

| यादृच्छिक चर (X) | प्रायिकता ($P_i$) |
|---|---|
| 0 | $P(X=0) = 16/25 \quad 92/145$ |
| 1 | $P(X=1) = 8/25 \quad 48/145$ |
| 2 | $P(X=2) = 1/25 \quad 5/145$ |

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

26. सिद्ध करना है -

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)((-a)$$

$$L.H.S. = \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_1 \to R_1 - R_2$ व $R_2 \to R_2 - R_3$ से -

$$L.H.S. = \begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 & b+c-c-a \\ b-c & b^2-c^2 & c+a-a-b \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & (a+b)(a-b) & b-a \\ b-c & (b+c)(b-c) & c-b \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$R_1$ से $(a-b)$ व $R_2$ से $(b-c)$ common लेने पर -

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a+b & -1 \\ 1 & b+c & -1 \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_3$ से -

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & a+b & -1 \\ 0 & b+c & -1 \\ a+b+c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$C_1$ से $(a+b+c)$ common लेने पर -

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी द्वारा

$$= (a-b)(b-c)(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & a+b & -1 \\ 0 & b+c & -1 \\ 1 & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ से -

$$= (a-b)(b-c)(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & a+b & -1 \\ 0 & c-a & 0 \\ 1 & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$R_2$ से $(c-a)$ common लेने पर-

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & a+b & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$C_1$ से प्रसार करने पर -

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)[0-0+1(0+1)]$$
$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$
$$= R.H.S.$$

27. दिया है -

$$y = (\sin^{-1}x)^2 \quad \text{--- (1)}$$

समी (1) का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर -

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\{(\sin^{-1}x)^2\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x \times \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{--- (2)}$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर-

$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(\sin^{-1}x)^2$ ②

समी ② का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करनेपर

$-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (1-x^2)\times 2\frac{dy}{dx}\times\frac{d^2y}{dx^2} = 8\sin^{-1}x \times \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow -2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}\times\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow -2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}\times\frac{d^2y}{dx^2} = 4\times\frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

समी ② से मान रखने पर

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[-2x\frac{dy}{dx} + 2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 4\times\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow -2x\frac{dy}{dx} + 2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 4$

दोनों पक्षों को 2 से विभाजित करने पर-

$\Rightarrow -x\frac{dy}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

$\Rightarrow \boxed{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0}$

| शिक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर |
|---|---|---|

28. $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ — (1)

गुणधर्म IV से -

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

यहाँ

$f(x) = \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$

$a = 0, \quad b = \pi$

तब समी (1) में गुणधर्म IV से -

$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\, dx$

$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+(-\cos x)^2}\, dx$ $\quad \{\because \sin(\pi-\theta) = \sin\theta,\ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta\}$

$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ — (2)

समी (1) व (2) को जोड़ने पर -

$2I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx + \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$2I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x + (\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$2I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x\,(\pi - x + x)}{1+\cos^2 x}\, dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ — (3)

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

गुणधर्म VII से - दाहिने

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{2a} f(2a-x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

यहाँ

$$2a = \pi$$

$$\Rightarrow a = \pi/2$$

तब माना (3) में गुणधर्म VII से -

$$2I = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

Put $\cos x = t$

$\Rightarrow -\sin x\,dx = dt$

$\Rightarrow \sin x\,dx = -dt$

$$I = -\pi \int_0^{0} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = -\pi \left[\tan^{-1} t\right]_1^0$$

$$I = -\pi \left[\tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(1)\right]$$

$$I = -\pi \left[0 - \pi/4\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}$$

सिद्ध हुई -

29. (iii) अवकल समीकरण - $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \cot x \cdot y = 2x + x^2 \cot x \quad \text{--- (1)}$$

अवकल समीकरण (1), मानक रूप $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप का है।
जहां

$$P = \cot x$$

$$Q = 2x + x^2 \cot x$$

अतः समाकलन गुणांक $I.F. = e^{\int P dx}$

$$= e^{\int \cot x \, dx}$$

$$= e^{\log \sin x}$$

$$I.F. = \sin x$$

अवकल समीकरण का व्यापक हल –

$$y \times I.F. = \int (Q \times I.F.) dx + c$$

$$\Rightarrow y \times \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x \, dx + c$$

$$\Rightarrow y \times \sin x = \int (2x \sin x + x^2 \cot x \sin x) dx + c$$

$$\Rightarrow y \times \sin x = \int \left(2x \sin x + x^2 \times \frac{\cos x}{\sin x} \times \sin x\right) dx + c$$

$$\Rightarrow y \times \sin x = \int (2x \sin x + x^2 \cos x) dx + c$$

$$\Rightarrow y \times \sin x = \int 2x \sin x \, dx + \int x^2 \cos x \, dx + c$$

$$\Rightarrow y \times \sin x = 2x \int \sin x \, dx - \int 2x \sin x \, dx + \int x^2 \cos x \, dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int \cos x \, dx \right\} dx + c$$

$$y \times \sin x = \int 2x \sin x \, dx + \left\{ x^2 \sin x - \int 2x \cos x \, dx \right\} + c$$

$$\Rightarrow y \times \sin x = \int 2x \sin x \, dx + x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx + c$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$\Rightarrow Y \times \sin x = x^2 \sin x + c$

$\Rightarrow Y = x^2 + \frac{c}{\sin x}$

30. रेखाओं के कार्तीय समीकरण –

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{--- (2)}$$

रेखा के ~~मानक~~ सदिश समीकरण –

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ --- (3) (रेखा (1) से)

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ --- (4) (रेखा (2) से)

{ ~~कार्तीय समीकरण~~ $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ से तुलना से }

अतः सदिश समीकरण के मानक रूप

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ से तुलना से

$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b}_1 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a}_2 = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{b}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

तब –

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \hat{i}(-2-1) - \hat{j}(2-2) + \hat{k}(1+2)$

$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = -3\hat{i} - 0\cdot\hat{j} + 3\hat{k}$ — (5)

तथा

$\vec{a_1} - \vec{a_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} - (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$

$\vec{a_1} - \vec{a_2} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

तब रेखाओं के मध्य की न्यूनतम दूरी -

$$d = \left| \frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_1} - \vec{a_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

$$d = \left| \frac{(-3\hat{i} - 0\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})}{|-3\hat{i} + 0\cdot\hat{j} + 3\hat{k}|} \right|$$

$$d = \left| \frac{3 - 0 + 6}{\sqrt{(-3)^2 + 0 + (3)^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{9}{\sqrt{9+9}} \right|$$

$$d = \left| \frac{9}{\sqrt{18}} \right| = \frac{9}{3\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ इकाई}$$

समाप्त